H30 年度　基礎化学　レポート課題２

解答例

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　**氏　名**

- レポート課題１は５月 21 日（月）13 時までに提出してください（提出先：化学教室）。
- レポート課題提出の有無は成績評価の対象となります。

問題１

地上にある質点（質量m (kg)）に作用する重力を考える。以下の２つの関係式から地球の質量M_E(kg)を求めなさい。

$$F = -G\frac{M_\mathrm{E}m}{r^2} \qquad (1)$$

$$F = -mg \qquad (2)$$

なお、式中の定数は以下の通りである。

万有引力定数$G = 6.674 \times 10^{-11}\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$、地球の赤道半径$R_\mathrm{E} = 6.3781 \times 10^3\ \mathrm{km}$、

重力加速度$g = 9.807\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

(1)式と(2)式を等しいとおき、M_Eを求める。途中でgの物理的な意味が明らかになる。

いま、地上で作用する重力を考えているので、(1)式中のrをR_Eに置き換えて、(1)式と(2)式は等しいとすると次の関係式が得られる。

$$G\frac{M_\mathrm{E}m}{{R_\mathrm{E}}^2} = mg \qquad (A)$$

次に(A)式の両辺からmを消去すると、gの意味が得られる。

$$g = G\frac{M_\mathrm{E}}{{R_\mathrm{E}}^2} \qquad (B)$$

地球上で測定されるgの値には地球の質量と半径が入っていることに注目すること。
実際に、惑星探査のときに探査機から物体を落として重力加速度を測定し、惑星の質量を測定している（通常、惑星の大きさは予め地球上での観測か探査機から三角測量で測定している）。

次に、(B)式をM_Eについて変形すると

$$M_\mathrm{E} = \frac{g{R_\mathrm{E}}^2}{G} = \frac{(9.807) \times \left(6.3781 \times 10^6\right)^2}{6.674 \times 10^{-11}} = \frac{3.9895 \times 10^{14}}{6.674 \times 10^{-11}} = 5.978 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

問題 2

高さh (m)にあるリンゴ（質量m (kg)）が地面に落ちた。地球とリンゴの重心間の距離が$R_{\mathrm{E}} + h$からR_{E}に変化したときのポテンシャルエネルギー変化ΔU (J)を

$$F = -G\frac{M_{\mathrm{E}}m}{r^2} \qquad (1)$$

$$F = -\frac{dU}{dr} \qquad (2)$$

で求め、ΔUが$\boldsymbol{-mgh}$になることを示しなさい（gは問題１とも関係している）。
ここで、$h \ll R_{\mathrm{E}}$である。また、導出の途中で以下の近似式を使うこと。

$$(1+x)^{\alpha} \fallingdotseq 1 + \alpha x, |x| \ll 1$$

(1)式（万有引力の式）からポテンシャルエネルギーmghが得られることを確認する問題である。
(1)式と(2)式からΔUを求め、途中で近似式を用いて式を整理し、さらに問題１で考えたgで関係式をまとめると$-mgh$が得られる。

(2)式の両辺に$-dr$をかけて変形すると、ポテンシャルエネルギーの微小変化量dUが得られる。

$$dU = -Fdr$$

この式に(1)式を代入し、以下のように積分してポテンシャルエネルギーの変化量（微小変化量の足し合わせ）ΔUを求める。

$$\Delta U = \int dU = -\int_{R_{\mathrm{E}}+h}^{R_{\mathrm{E}}} F\,dr = -\int_{R_{\mathrm{E}}+h}^{R_{\mathrm{E}}} \left(-G\frac{M_{\mathrm{E}}m}{r^2}\right) dr = \left[-G\frac{Mm}{r}\right]_{R_{\mathrm{E}}+h}^{R_{\mathrm{E}}} = -\frac{GMm}{R_{\mathrm{E}}} + \frac{GMm}{R_{\mathrm{E}}+h} \qquad \text{(A)}$$

ここで、以下のように右辺第二項$\frac{1}{R_{\mathrm{E}}+h}$の近似を行う（次の段階に進むことが出来る）。

$$\frac{1}{R_{\mathrm{E}}+h} = \frac{\frac{1}{R_{\mathrm{E}}}}{1+\frac{h}{R_{\mathrm{E}}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}}(1+x)^{-1} \fallingdotseq \frac{1}{R_{\mathrm{E}}} \times \{1-x\} = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}} \times \left\{1 - \frac{h}{R_{\mathrm{E}}}\right\} = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}} - \frac{h}{{R_{\mathrm{E}}}^2}$$

近似のときに　$x = \frac{h}{R_{\mathrm{E}}}$　とおいた（$x = \frac{h}{R_{\mathrm{E}}} \ll 1$である）。

$$\therefore \frac{1}{R_{\mathrm{E}}+h} = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}} - \frac{h}{{R_{\mathrm{E}}}^2} \qquad \text{(B)}$$

近似の結果の(B)式を(A)式に代入して

$$\Delta U = -\frac{GM_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}} + GM_{\mathrm{E}}m\left(\frac{1}{R_{\mathrm{E}}} - \frac{h}{{R_{\mathrm{E}}}^2}\right) = -\frac{GM_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}} + \frac{GM_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}} - \frac{GM_{\mathrm{E}}mh}{R_{\mathrm{E}}^2} = -\frac{GM_{\mathrm{E}}mh}{R_{\mathrm{E}}^2}$$

ここで、問題１で考えた$g = \frac{GM_{\mathrm{E}}}{{R_{\mathrm{E}}}^2}$を用いると

$$\Delta U = -\frac{GM_{\mathrm{E}}mh}{R_{\mathrm{E}}^2} = -mgh$$

になる。

問題２で考えたことは以下の図に相当する。